



TITLE:

超伝導体における磁束の運動:Y.B. Kim氏の講演ノートから(量子統計的凝縮系(超伝導超流動)研究会報告)

AUTHOR(S):

CITATION:

超伝導体における磁束の運動:Y.B. Kim氏の講演ノートから(量子統計的凝縮系(超伝導超流動)研究会報告). 物性研究 1967, 8(1): A35-A50

ISSUE DATE:

1967-04-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/86008>

RIGHT:

超伝導体における磁束の運動

— Y.B.Kim 氏の講演ノートから —

このノートは川村氏（物性研）の御努力により作ることが出来ました。
感謝します。

§ 1 Introduction

周知のように超伝導体は抵抗 $\rightarrow 0$, また超流動体では粘性 $\rightarrow 0$ という特性を示す。Maxwell の方程式によると電流のあるとき、そのまわりに磁場が生ずる（才 1 図 a）。すなわち

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (1)$$

London の現象論は、流れの " 超流動 " 成分が渦なし運動をすることを根底とする。すなわち、超流動成分の運動量を \mathbf{p}_S として

$$\nabla \times \mathbf{p}_S = 0 \quad (2)$$

超伝導体では $\mathbf{p}_S = m\mathbf{v}_S + \frac{e}{c} \mathbf{A}$ 故(2)から

$$\nabla \times \mathbf{J} = - \frac{Ne^2}{mc} \mathbf{H} \quad (3)$$

(2) は (1) に対して、超伝導体では磁場があると電流が周囲に生ずることを要請する（才 1 図 b）。(1), (3) から \mathbf{J} を消去すると

才 1 図

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \lambda^{-2} \mathbf{H} \quad (4)$$

研究会報告

が出て Meissner effect が説明出来る。(2)は運動量空間に $p_s = \text{constant}$ という Long Range Order があることを示し、London はこれが量子力学的現象によるものであることを強調した。量子力学的には電流密度は

$$\mathbf{J}_{q,m} = \frac{i\hbar e}{2m} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*) - \frac{e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2 \quad (5)$$

であらわされるが、普通の金属では \mathbf{A} が与えられるとそれに対応して ψ が変化するために(5)の才一項と才二項はうち消し合うが、超伝導体ではその際 ψ は rigid であるために、磁場をかけると反磁性電流 $-\frac{e^2}{mc} \mathbf{A} |\psi|^2$ が残る。

London の理論に次ぐ重要な現象論は Ginzburg-Landau の理論である。彼らによつてはじめて複素数の order parameter が導入された。超伝導体では、それが系の波動関数の役割を果たす。order parameter を

$$\psi = f e^{-iS} \quad (6)$$

とあらわすと(5)は

$$\mathbf{J}_{q,m} = -\frac{e\hbar}{m} |f|^2 \nabla S - \frac{e^2}{mc} |f|^2 \mathbf{A} \quad (7)$$

反磁性電流の他に transport current のあるときはどうしても(7)の ∇S 項が必要であり、(6)から次の関係式が得られる。

$$\hbar \nabla S = -\frac{m\mathbf{J}}{e|f|^2} + \frac{e}{c} \mathbf{A} = \mathbf{p}_s \quad (8)$$

もちろん、はじめから $\mathbf{p}_s \sim \nabla S$ を仮定しても(2)は満足できるが、(6)はもう少し量子力学的基礎に立つた仮定である。(8)は又磁束量子化を示唆する。すなわち

$$\oint \mathbf{p}_s \cdot d\mathbf{l} = \oint (m\mathbf{v}_s + \frac{e}{c} \mathbf{A}) \cdot d\mathbf{l} = \hbar \oint \nabla S \cdot d\mathbf{l} \quad (9)$$

(9)の最後の積分は典線にそつての位相のずれであるが、積分のはじめと終りは同じ位置故この位相の差は 2π の整数倍でなくてはならない。(9)の真中の式で \mathbf{v}_s の項は $\mathbf{v}_s = 0$ の所で積分すれば寄与しない。 \mathbf{A} の線積分はその閉曲線によ

つてかこまれた面を通過する全磁束に他ならない。いいかえれば

$$(e/c)\varphi = 2n\pi\hbar = hn \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

(10)は磁束が量子化されていることを示す。ただし、Cooper pairの概念が導入され(10)の e は実際は $2e$ でおきかえられなくてはならない。すなわち(10)より flux quantum は

$$\varphi_0 = hc/2e \cong 2 \times 10^{-7} \text{ gauss-cm}^2 \quad (10)$$

の大きさをもっている。Ginzburg-Landauの現象論はその後Abrikosovによつて才二種超伝導体の"Abrikosov structure"の研究に発展したが、そのことは後に述べる。なおGinzburg-Landau理論の微視的な基礎付けは後にGor'kovによつて行われ、これら一連のロシアにおける仕事はGLAG理論と総称されている。

§ 2 Normal Core

さて、超流動性を示す系を condensate と呼ぶが、それは前述の(6)で記述される。しかし condensate でなくとも "Galilean Invariance" の成りたつ系では一般に波動関数は(6)の形をもつ。いま $\psi_0(\mathbf{r}_1 \cdots \mathbf{r}_N)$ を基底状態とすると運動量 \mathbf{p} をもつた状態は

$$\begin{aligned} \psi_{\mathbf{p}} &= e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_1 + \cdots + i\mathbf{p} \cdot \mathbf{r}_N} \psi_0 \\ &= e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{R}} \psi_0(\mathbf{r}_1 \cdots, \mathbf{r}_N) \end{aligned}$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \cdots + \mathbf{r}_N$$

が成りたつから、たしかに(6)が成りたち、位相は(8)を満足する。しかし、Galilean invariance が成りたない系では、上の議論は通用しないから例えば Josephson 効果のようなものを議論するときに(6)及び(8)を使うとすれば "condensate" においては(6)及び(8)が成りたつことを証明しなくてはならないが、今のところその証明はない。Anderson や Josephson は(6)を

研究会報告

Ansatzとして使っているが我々もそれにならつて(6)を出発点として以下の議論を進める。

特に付記しておきたいことは、超流動性に関する information は全部位相 S に含まれているということである。London が p_s に Long Range Order があるといつたことは、 S に coherence があるということで、此の coherence は数キロも離れた所まで及び得るわけである。一方 f は熱平衡にある condensate の密度を示すもので（例えば super[↑]electron の密度）その空間的変化を現わす距離が coherence length ξ ($\approx 10^{-4}$ cm) である。

一個の粒子の位相を S とすると、 N 個の粒子系の位相は

$$e^{iS} \dots e^{iS} = e^{iNS}$$

となるから、粒子数と位相とは互いに canonical conjugate な量である。したがつて S と N の間に Heisenberg の関係を想定できる。

$$i\hbar \dot{N} = [\mathcal{H}, N] = i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial S} \quad (11)$$

$$i\hbar \dot{S} = [\mathcal{H}, S] = -i \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial N} \quad (12)$$

(11) は位相の異なる系の間で粒子が移動するという Josephson 効果の存在を表わす重要な式であるが、われわれは (12) の方を考察しよう。

$E = \mu N$ を使うと (12) は

$$\hbar \frac{dS}{dt} = \mu = \mu_0 + \frac{1}{2} m v_s^2 + eV \quad (13)$$

と書ける。ここで μ_0 は、平衡系の chemical potential であり V は系に与えられた外場のポテンシャルである。

ところで前にふれたように Abrikosov は、Ginzburg-Landau 方程式に基づいて、磁場中の才二種超伝導体の order parameter ψ の研究を行つた。それによると才 2 図に模型的に描いたように超伝導体内に、 f の小さい磁束の通過する領域が生ずる。そしてその周辺に反磁性電流の流れる領域がある。こ

の電流密度は、Meissner効果により中心から λ 程度の範囲に流れ、また f の小さい領域は "coherence length" ξ 程度である (才3図)

才 2 図

才 3 図

一方、de Gennes et al. は、純粋な金属の 0°K における excitation spectrum を計算し、energy gap が磁束の周囲で4図aのようになっていることを示した。また excitation の状態密度は才4図bのようになる。ここで $4_G^1 \sim 4_G^2 / E_F \ll 4_G$ である。すなわち、磁束線の中心領域では、

才 4 図

order parameter $f(r)$ は小さいながらも有限であるが energy gap がないという、いわゆる "gapless region" である。こういう理論計算を基礎として、磁束は中心が半径 ξ まで normal な金属の円筒であるというモデルがよく使われる。de Gennes et al. の理論を有限温度または、不純物のある場合に拡張した理論はないが、実験をみるとすくなくとも才一近似としてはこのモデルでよさそうである。

§ 3 Vortex の運動

平衡状態にある才二種超伝導体では order parameter $S(r)$, $f(r)$ が以上に略記した如く空間的变化をなすが、これを実験的に探知するには何等かの perturbation を外部から加え、それに対する反応を観測せねばならない。電気伝導を測る実験ではこの perturbation は transport current で加えられ、実験の結果は Abrikosov structure をしている磁束が空間的に動いていると見た方が一番わかり易い。従つて $S(r, t)$, $f(r, t)$ なる状態を考え

研究会報告

ざるを得ず GLAG 理論を時間を含めて一般化せねばならぬが、これは極めてむづかしい問題で、今のところモデルを使つた理論的考察しかない。

さて、才5図のような実験をしてみると、超伝導体の両端に電圧が生ずることが判つた。

才 5 図

もし、vortexが動かないなら、外からの電流はnormalなvortex中心を迂回して抵抗は生じないはずである。このことはvortexが移動することを意味する。このモデルは単に磁場だけが移動するということではなく、才3図のgapless領域の外側の円形のpersistent currentの"flow pattern"全体が移動しているとみなしている。それ故"vortex"の運動とみなしたのである。このvortexの移動を想定したのは次のような理由による。まず才6図に示すようにtransport currentを通すとMaxwell方程式により(才1図a)試料の内外に磁場が生ずる。試料の外側に出来る磁場の様子は才6図に矢の頭と尾で描かれた向きにできる。これに対応して、試料内にも磁束が入る。

才 6 図

ところでもともと外場によつて磁束が一様に入つていたら、電流による磁束はvortexの密度を図のように上でうすく下でこくする。そうすると磁束の間のMaxwell応力によりvortexは一様になろうとして下から上へ移動する。

それではこのようにしてできたvortexの移動はどのような電場を作るであろうか。はじめのうちは実験結果から来る必要性もあつて電場は磁束が動くときのinduction mechanismによるものであることを仮定した。すなわち

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{或は} \quad \mathbf{E} = \frac{\mathbf{v}_L}{c} \times \mathbf{B} = n \frac{\mathbf{v}_L}{c} \times \varphi_0 \quad (14)$$

ここで \mathbf{v}_L は vortex の速度であり n は vortex の密度である。ところが実

際の実験では外部磁場も transport current も時間的に一定しているから回路の中に induction によつて電場が出るはずがないという反論が出た。

vortex が動くということは量子性を含む新しい概念なので classical にはすつきりした説明がむづかしいというわけもあつて、(14) に対する賛否の議論が多数出現した。モデルを使つて vortex motioo によつて生ずる電場を細かく計算した論文も数個あらわれた。ここではわれわれは (14) が結果的に見て正しいということ (13) から導き出したい。

試料の中に A, B2 点を考える (才7図)。A, B の間を通過する vortex がある。A, B 二点の位相のちがいは (13) から

$$\hbar \frac{d\nabla S}{dt} = 2e\nabla V \quad \text{or} \quad \mathbf{E} = \frac{\hbar}{2e} \frac{d\nabla S}{dt} \quad (15)$$

に従う。ここで $2e$ は Cooper pair に対応している。一個の flux quantum が通過すると A, B それぞれの位相は $\pi, -\pi$ だけかわるから位相差はそのとき 2π だけ変化する。vortex の速度を v_L , vortex の線密度を n とし、毎秒 nv_L 個の vortex が通過するから (15) から

$$E = \frac{\hbar}{2e} v_L n 2\pi = n \varphi_0 \frac{v_L}{c} \quad (16)$$

これは (14) と同じ結果である。

v_L の大きさはどのようにして決定されるだろうか。まず電流が vortex の中を通過すると考えると、電流には Lorentz 力が働きその反作用として vortex は

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{J}}{c} \varphi_0 \quad (17)$$

の力をうける。この力によつて vortex が v_L という速度で動くと

$$\mathbf{F} = \eta \mathbf{v}_L \quad (18)$$

ここで η は vortex の運動の際の粘性係数で、与えられた \mathbf{J} に対し v_L がどれくらい大きくなるかを決める。実験的に測る量は flow resistivity $\rho_f =$

研究会報告

E/J で (16), (18) より

$$\rho_f = \varphi_0 B / \eta c^2 \quad (19)$$

から η がきまる。この ρ_f と磁場の関係は才 8 図のようになる。この図で $H < H_{C2}$ の領域は

$$\rho_f = \rho_n (H / H_{C2}) \quad (20)$$

才 8 図

(20) の (H / H_{C2}) は試料の表面積中に占める vortex の面積の割合だから (20) は丁度、gapless 領域を電流が流れたときの抵抗が flow resistivity に等しいことを示している。実際に

$$H \simeq B = n \varphi_0$$

$$H_{C2} = \varphi_0 / \pi \xi^2$$

を (20) に代入すると

$$\rho_f = \rho_n n \pi \xi^2$$

がでる。これで vortex が移動しているときは、transport current は normal な vortex 中心を避けて通るわけである。勿論これは電場を生じこれが観測にかかると考えるわけである。

このような実験を定量的に解釈するための理論として、Bardeen たちの議論と Tinkham の議論がある。この二つのやり方のちがいは前者は order parameter の位相 S を主に考え、後者は f の運動を問題にする。

vortex flow で観測される電場が Ohmic process によつて理解出来ないことは次の実験で確かめられた。(才 9 図) すなわち、超伝導体 P に絶縁体をはさんで金属 S を載せる、P に電流を流す。S が normal であると電場は誘

 才 9 図

起されないがこれが超伝導だと、下の磁束の運動が上の超伝導体中にも couple して電場が生ずる。このような現象は単なる Ohmic process としては説明が出来ない。

なお (Fig.8) の curve はマイクロ波で J を誘起しても全く同じものが観測される。最後に大きな H_{c2} をもつた物質について付言する。才 8 図は Nb-Ta について得られたものであるが、もつと H_{c2} の大きな Nb-Ti, Nb-Zr 等でやると才 10 図を得る。 H_{c2}^* は ρ_n のたち上りを延長したものであるがこの値は

$$H_{c2} = 3 \times 10^4 \rho_n r T_c \sim 200 \text{ Koe}$$

の理論値と一致することが判つた。才 10 図の観測値である H_{c2} では大きな磁

 才 10 図

場中で電子スピンの揃うために Cooper pair の反対スピン対がこわれて normal state になるものと思われる。

以上の考察からわかるように、vortex の運動を microscopic theory から導き出すことはかなりむづかしいが、現象論的な基礎は実験的に確立されたと見てよい。

以 上

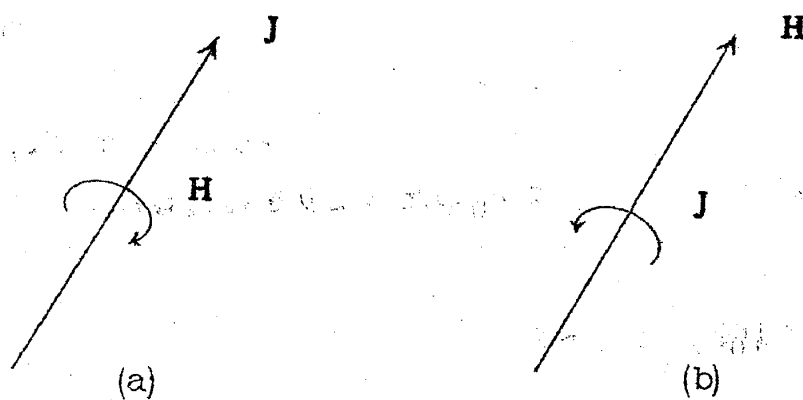
(付記)

このノートは、Y.B.Kim 氏が研究会期間中の去る 2 月 2 日、基研談話会で行なわれたものを記録して作りました。一応、Kim 氏に目を通していただきましたが、筆者が力不足と理解力の欠如で間違いも多くあると思います。責任はすべて筆者にあります。なお詳しいことは "Quantum Fluids" ed. D.F.

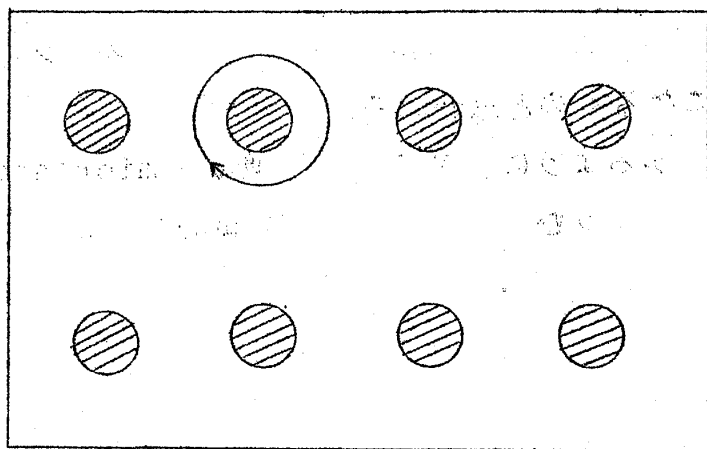
研究会報告

Brewer, John Willey & Sons Inc. N.Y (1966) にある諸論文ならびに
日本物理学会発行の「物理学論文選集 153」『超伝導』にある諸論文を参照
されたいとのことです。



東大物性研 川 村 清

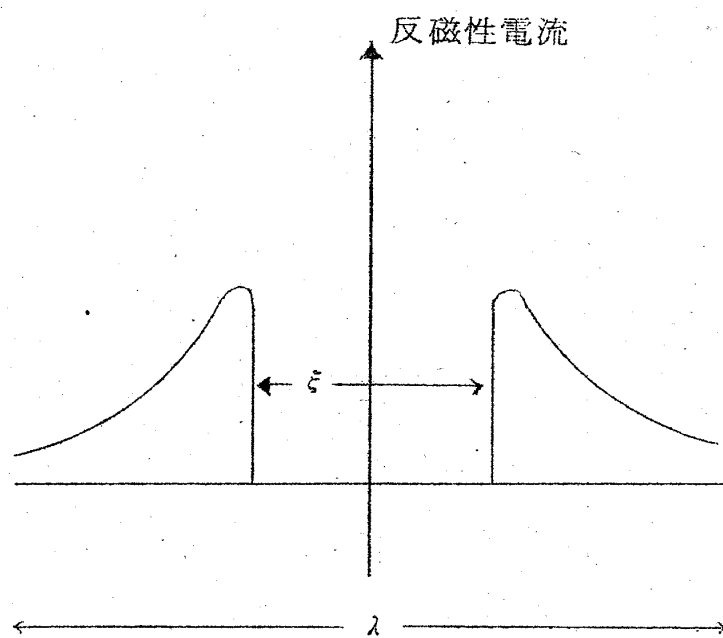


才 1 図

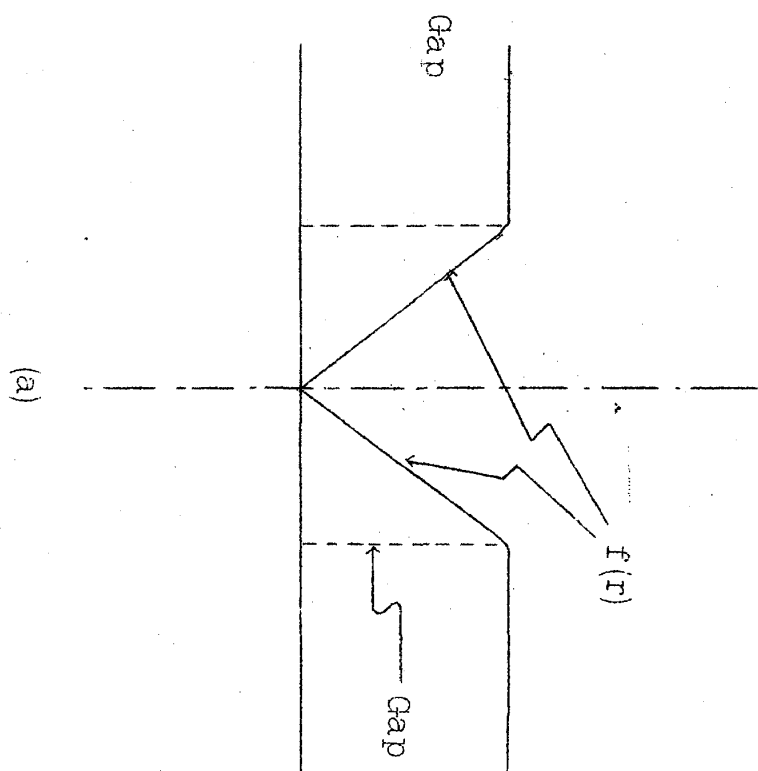


才 2 図

-  : normal core
-  : 反磁性電流

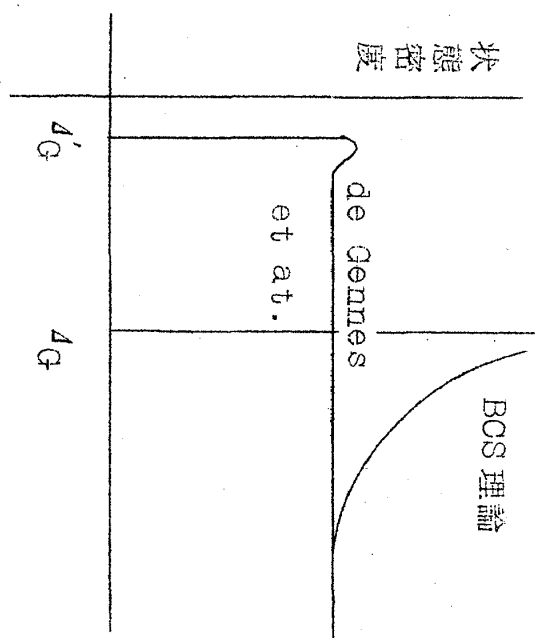


才 3 図



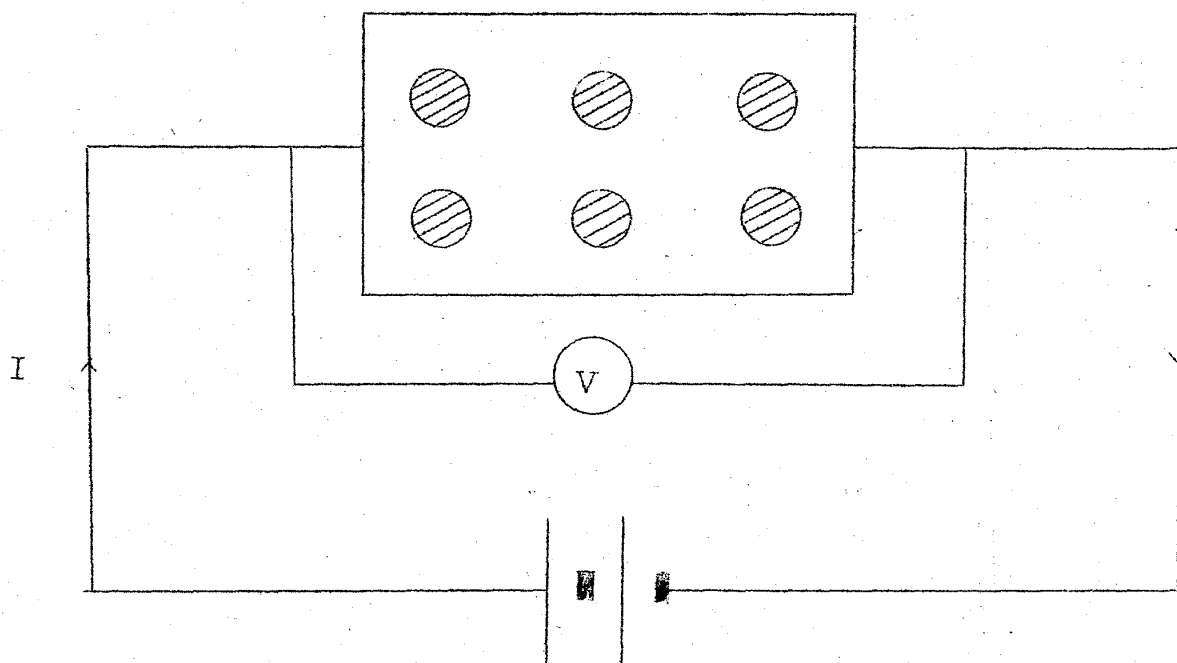
(a)

才 4 図

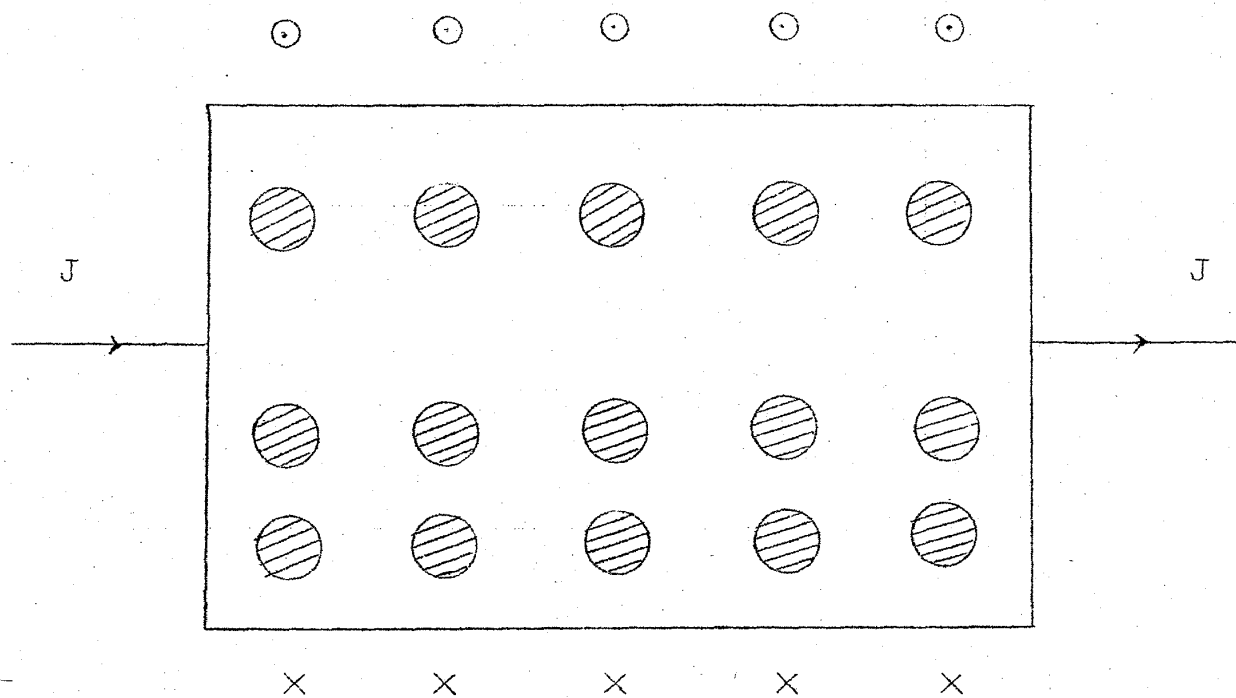


(b)

⊗ 外からの磁場

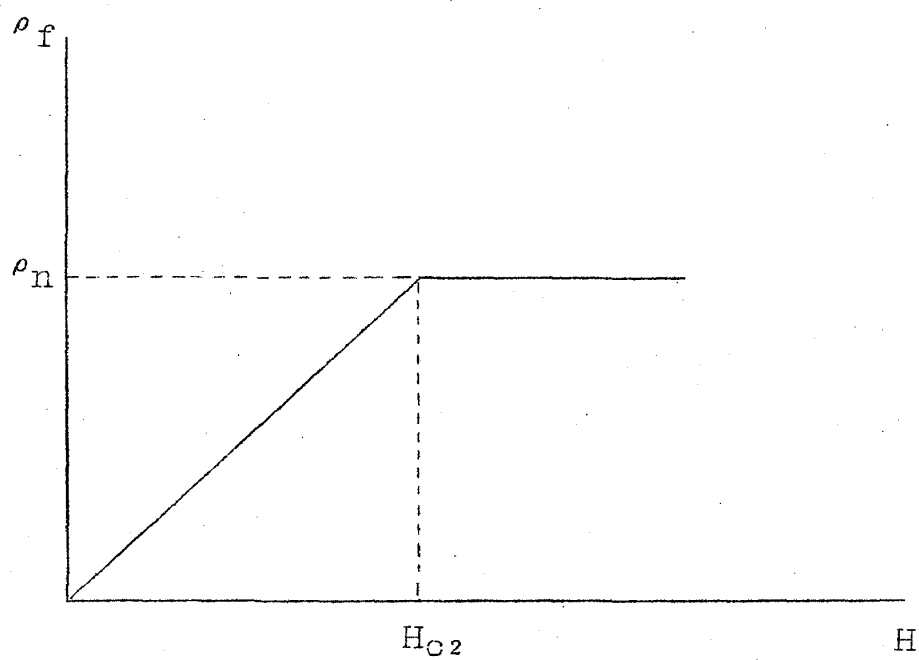
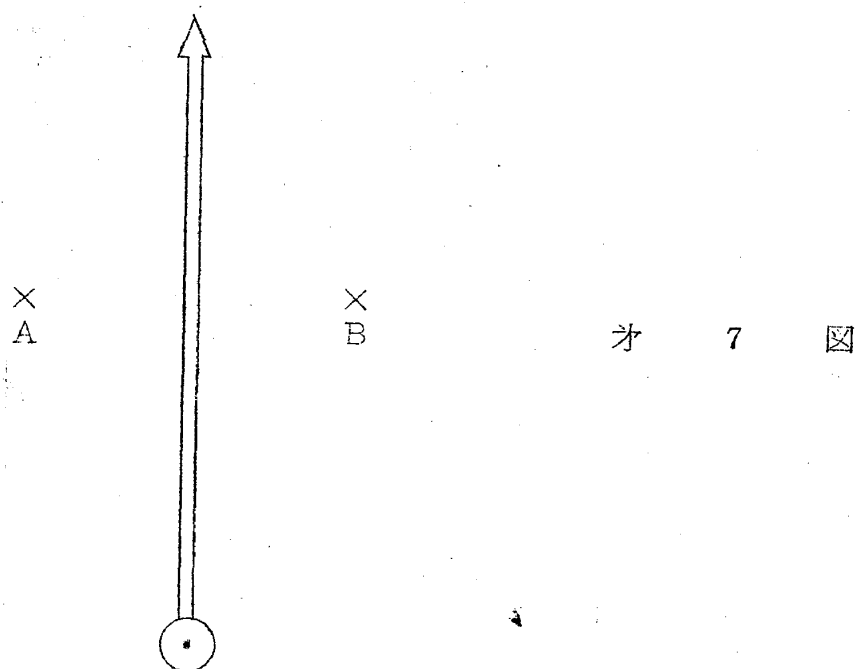


才 5 図

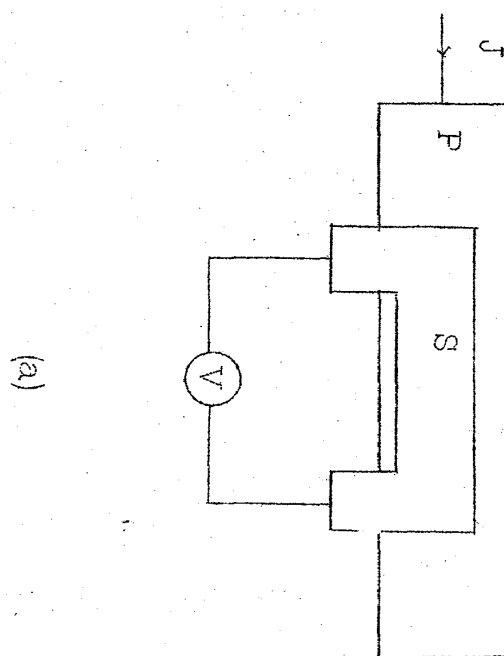


才 6 図

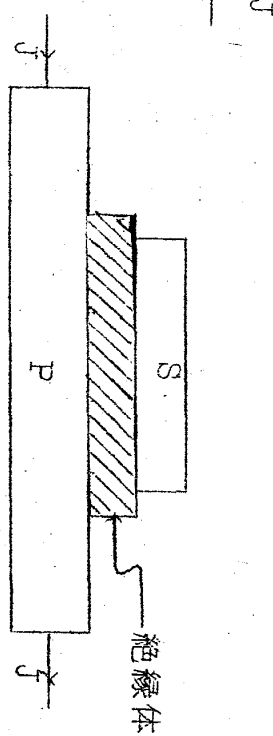
研究会報告



才 8 図



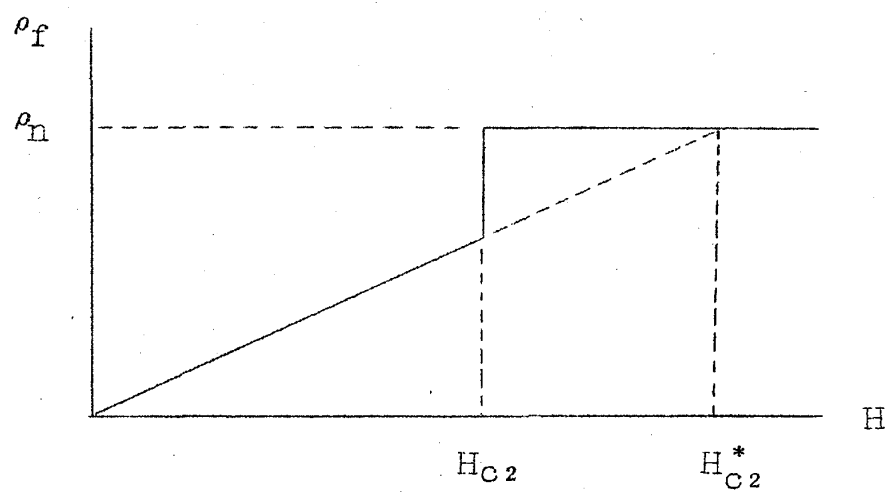
(a)



(b)

才 9 図

研究会報告



才 1 0 図